33 四平方和定理

本文的主要目的是證明拉格朗日定理：每一個正整數皆可表為四個整數的平方和及高斯的三角形數定理：每一個正整數皆可表為三個三角形數的和。

33.1 尤拉恆等式

我們很容易證得如下的斐波那契恆等式：

$$\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(y_1^2+y_2^2\right)=\left(x_1y_1-x_2y_2\right)^2+\left(x_1y_2+x_2y_1\right)^2.$$

事實上，我們有較複雜的尤拉恆等式：

$$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2\right)=z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2,$$

其中

$$\begin{cases} z_1=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4, \\ z_2=x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3, \\ z_3=x_1y_3-x_3y_1+x_4y_2-x_2y_4, \\ z_4=x_1y_4-x_4y_1+x_2y_3-x_3y_2. \end{cases}$$

33.2 四平方和問題

定理 33.1　每一個質數皆可表為四個整數的平方和。

【證明】因為 $2=1^2+1^2+0^2+0^2$，所以只需討論奇質數 p 即可。現在分兩個步驟來證明：

(1) 證明：存在一個正整數 $m\,(1\le m<p)$ 使得 mp 可表為四個整數的平方和。考慮下列 $p+1$ 個整數

$$1+0^2,1+1^2,1+2^2,\cdots,1+\left(\frac{p-1}{2}\right)^2,$$
$$-0^2,-1^2,-2^2,\cdots,-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

根據鴿籠原理，必有兩個數被p除之，餘數相等且此兩數恰在上、下列各有一數。因此存在兩個整數x, y使得

$$\begin{cases} 1+x^2 \equiv -y^2 \pmod{p}, \\ 0 \le x, y \le \dfrac{p-1}{2}. \end{cases}$$

因為$1 \le 1+x^2+y^2 < 1+2(\dfrac{p-1}{2})^2 < p^2$，所以

$$0^2+1^2+x^2+y^2 = mp,$$

其中$1 \le m < p.$

(2) 假設正整數m是使mp可表為四個整數平方和的最小正整數。我們主要目的是證明$m=1$。由(1)可設

$$\begin{cases} mp = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2, \\ 1 \le m < p. \end{cases}$$

首先證明m為奇數：如果m是偶數，則

$$mp = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$$

亦為偶數。由

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 \equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \equiv mp \equiv 0 \pmod{2}$$

容易推得$x_1+x_2+x_3+x_4$亦為偶數。因此產生下列三種情形：

(a) x_1, x_2, x_3, x_4均為偶數。

(b) x_1, x_2, x_3, x_4均為奇數。

(c) x_1, x_2, x_3, x_4中有兩個為偶數，兩個為奇數；為了方便，不妨假設x_1, x_2為偶數，x_3, x_4為奇數。

無論是那一種情形，我們都有$x_1+x_2, x_1-x_2, x_3+x_4, x_3-x_4$為偶數，因此得到

$$\frac{mp}{2}=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2+\left(\frac{x_3-x_4}{2}\right)^2,$$

即$\dfrac{(mp)}{2}$能表為四個整數的平方和，這與m是最小的假設矛盾。所以m為奇數。

其次證明：$m=1$。由前述知道m為奇數。如果$3\le m<p$，容易推得m不能同時整除x_1,x_2,x_3,x_4（否則，由$mp=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$知$p$不為質數）。因此存在四個不全為 0 的整數

$$y_1,y_2,y_3,y_4$$

滿足

$$\begin{cases} x_i\equiv y_i \pmod m, \\ |y_i|<\dfrac{m}{2}, \end{cases} \qquad i=1,2,3,4.$$

因此有

$$\begin{cases} 1\le y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2<4\left(\dfrac{m}{2}\right)^2=m^2 \\ y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2\equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\equiv 0 \pmod m \end{cases}$$
$$\Rightarrow y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2=nm, 1\le n<m<p$$
$$\Rightarrow \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2\right)=nm^2p.$$

令

$$\begin{cases} z_1=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4, \\ z_2=x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3, \\ z_3=x_1y_3-x_3y_1+x_4y_2-x_2y_4, \\ z_4=x_1y_4-x_4y_1+x_2y_3-x_3y_2. \end{cases}$$

因為$x_i\equiv y_i \pmod m$及$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=mp\equiv 0 \pmod m$，所以

$$z_1\equiv z_2\equiv z_3\equiv z_4\equiv 0 \pmod m.$$

由此式及尤拉恆等式得到

$$\begin{cases} nm^2 p = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2\right) \\ \qquad\quad = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \\ 1 \le n < m < p \end{cases}$$

$$\Rightarrow np = \left(\frac{z_1}{m}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{m}\right)^2 + \left(\frac{z_3}{m}\right)^2 + \left(\frac{z_4}{m}\right)^2,$$

即 np 能表為四個整數的平方和，這與 m 是最小的假設矛盾。因此 $m=1$。

由(1),(2)可知：每一個質數皆可表為四個整數的平方和。

定理 33.2(拉格朗日定理)　每一個正整數皆可表為四個整數的平方和。

【證明】由前定理及尤拉恆等式馬上得證。

33.3 高斯 num $=\Delta+\Delta+\Delta$ 定理

所謂三角形數是指可以表為

$$\frac{(n-1)n}{2},\ n \text{ 為正整數},$$

的非負整數，所以前幾個三角形數為

$$0,1,3,6,10,15,21,\cdots.$$

高斯於 1796 年的七月十日，在他的一篇論文上寫道

EΥPHKA!　num=Δ+Δ+Δ.

用今天的語言來說，就是要證明

定理 33.3(高斯三角形數定理)　每一個正整數皆可表為三個三角形數的和。

在證明這個定理之前，我麼先敘述一個特別的定理

定理 33.4　所有被 8 除之，餘數為 3 的正整數皆可表為三個奇數的平方和。

【證明】在這裡，我們不打算證明這個定理，因為它的證明牽涉到較深入的算術知識。[17]

[17] 有興趣的同學可以參考 M. B. Nathanson 的書 Additive Number Theory 的第 23 頁。

【高斯三角形數定理的證明】設N是給定的正整數，利用前定理知道：$8N+3$可以表為三個奇數的平方和，並令

$$8N+3=(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2=4(a^2+a+b^2+b+c^2+c)+3.$$

得到

$$N=\frac{a(a+1)}{2}+\frac{b(b+1)}{2}+\frac{c(c+1)}{2}.$$

得證。

習題 33.1　試驗證尤拉恆等式。

習題 33.2　是否“每一個質數皆可表為三個整數的平方和”。

習題 33.3　試將 119 表為最少個正整數的平方和。

習題 33.4　試將 2023 表為最少個正整數的平方和。

習題 33.5　我們可以利用拉格朗日定理來證明四次方和的問題：

(1) 證明恆等式

$$6(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2=\sum_{1\le i<j\le 4}(x_i+x_j)^4+\sum_{1\le i<j\le 4}(x_i-x_j)^4.$$

(2) 設n為正整數。證明$6n^2$可表為 12 個整數的四次方和。

(3) 證明每個正整數都可表為 53 個整數的四次方和。

(4) 證明每個正整數都可表為 50 個整數的四次方和。

習題 33.6　已知$x_1,x_2,x_3;y_1,y_2,y_3$是六個未知數，是否存在整係數多項式

$$
\begin{aligned}
z_1 &= f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3),\\
z_2 &= g(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3),\\
z_3 &= h(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)
\end{aligned}
$$

滿足

$$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)=\left(z_1^2+z_2^2+z_3^2\right).$$

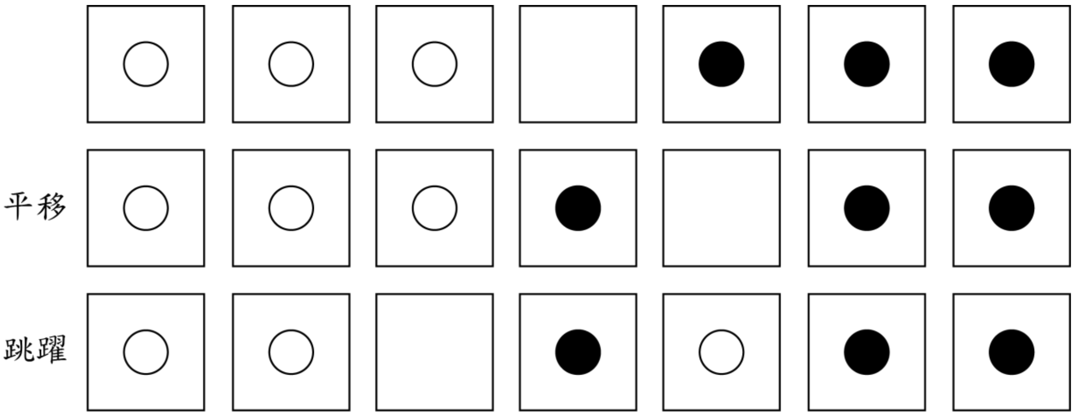
習題 33.7　數學家尤拉發現：如果 T 是一個三角形數，則

$$1\cdot T+0,9\cdot T+1,25\cdot T+3,49T+6,81\cdot T+10$$

也是三角形數。你能根據這個發現，得到一般的公式嗎？

動手玩數學

如下圖：在七個排成一直線的正方格上放置三粒白棋，三粒黑棋。第二圖是將黑棋“平移”，第三圖則是將第二圖的白棋“跳躍”。如果限制每次只能採取“平移”或者“跳躍”兩種運動（無論白棋或者黑棋均可平移或跳躍），則須運動幾次方能將三粒白棋與三粒黑棋完全互換。



挑戰題

設 $n\geq 3$ 為正整數。試證明存在奇正整數 x 與 y 滿足

$$2^n = x^2 + 7y^2.$$

完全平方數的猜想

數學家沃森使用較深的橢圓函數證明了

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

僅在$n = 1$及$n = 24$時才是個完全平方數，大數學家莫德爾則要求“是否有比較基本的證明方法”（也就是說，一般高中生或大學生就可以看懂的證明方法）？

莫德爾亦猜想

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

僅在$n = 2, 7, 15$及 74 時才是個完全平方數。直到目前為止仍不知此猜想是否為正確。